EPITA

S1

Mathématiques

Primitives et intégrales :

révisions de Terminale

ECUE APIS

Présentation

Ce support est le début de votre cours de mathématiques « Primitives et intégrales » à l'EPITA en S1. Ce cours fait partie de l'ÉCUE APIS du S1. A priori, ce cours correspond à votre cours de terminale au lycée.

En aucun cas, ce cours ne doit être diffusé à l'extérieur de l'école ou sur internet.

Prérequis

— Déterminer les dérivées des fonctions usuelles de la forme $f \circ u$.
— Reconnaitre les fonctions continues.
— Terminale spécialité mathématiques

Table des matières

1 Primitive 3
1.1 Définition et primitives usuelles 3
1.2 Propriétés 4
2 Intégrales 6
2.1 Aire sous une courbe 6
2.2 Intégrale et primitive 13
2.3 Propriétés des intégrales 13

1 Primitive

1.1 Définition et primitives usuelles

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

On a ainsi : $\forall\, x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

On note souvent $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemples

Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \longmapsto \ln(x)$

Une primitive de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.
2. Soient f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{R}$ constant.

Exemples

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto 2$ est $x \longmapsto 2x$

   Une autre primitive est $x \longmapsto 2x + \pi$

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \cos(x)$ est $x \longmapsto \sin(x)$

   Une autre primitive est $x \longmapsto \cos(x)$ est $x \longmapsto \sin(x) + 6$

3. Si on impose une valeur à F en un point alors il n'y a plus qu'une unique primitive.

   Par exemple, il n'y a qu'une seule primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qui vaut 3 en 4.

   En effet, toutes ses primitives sont de la forme $F(x) = 2\sqrt{x} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Or on veut que $F(4) = 3$. Or $F(4) = 4 + c$ donc $c = 3 - 4 = -1$. Par conséquent, la primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qui vaut 3 en 4 est $x \longmapsto 2\sqrt{x} - 1$.

Proposition : primitives usuelles

c est une constante, c'est-à-dire un réel.

$f(x)$	$F(x)$	Intervalle de définition
a $(a \in \mathbb{R})$	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R},$ $\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	dépend de α
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(\alpha = -\dfrac{1}{2})$	$2\sqrt{x} + c$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^2}$ $(\alpha = -2)$	$-\dfrac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$
$\dfrac{1}{x}$ $(\alpha = -1)$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$	$]0, +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} =$ $1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$	sur un intervalle où le cosinus ne s'annule pas
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$

1.2 Propriétés

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur I, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.

Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I est $\alpha F + \beta G$.

Preuve :

$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$

Exemples

- Une primitive de $f : x \longmapsto x + 3x^2 + 6x^5$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} + 3 \times \dfrac{x^3}{3} + 6\dfrac{x^6}{6} = \dfrac{x^2}{2} + x^3 + x^6$
- Une primitive de $g : x \longmapsto \cos(x) + 6e^x$ sur $\mathbb{R}$ est $G : x \longmapsto \sin(x) + 6e^x$
- Une primitive de $h : x \longmapsto \dfrac{3}{\cos^2(x)} + 2$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est $H : x \longmapsto 3 \times \tan(x) + 2x + 42$

Proposition : Primitives usuelles de fonctions composées

Fonction de la forme $f \circ u$	Une primitive (sur l'intervalle où elle est définie)
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$-u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Exemples

- Une primitive de $f : x \longmapsto e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{2}$.
- Une primitive de $g : x \longmapsto \cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est $H : x \longmapsto \dfrac{\sin(3x)}{3}$.
- Une primitive de $h : x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $H : x \longmapsto \ln(x^2+1)$.

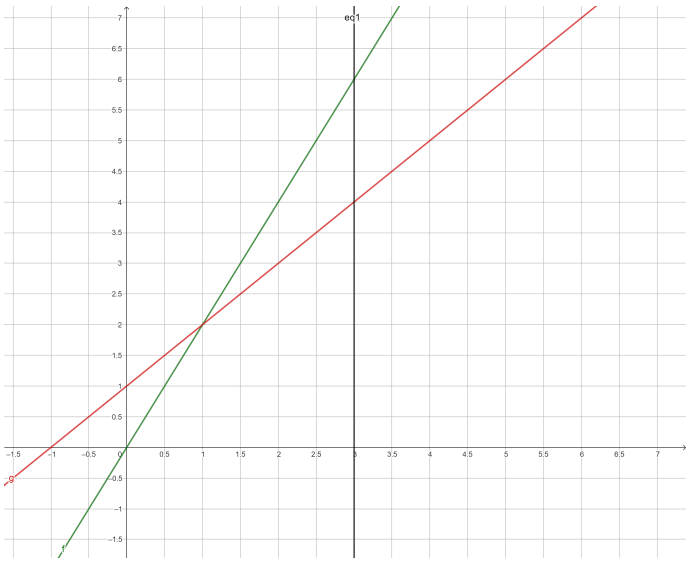
Entrainement : donner une primitive de $i : x \longmapsto \tan(x)$, $j : x \longmapsto 3e^{-x} + \pi\cos(4x+5)$ et $k : x \longmapsto xe^{x^2}$ en précisant l'intervalle sur lequel vous vous placez.

2 Intégrales

Dans toute cette section, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

2.1 Aire sous une courbe

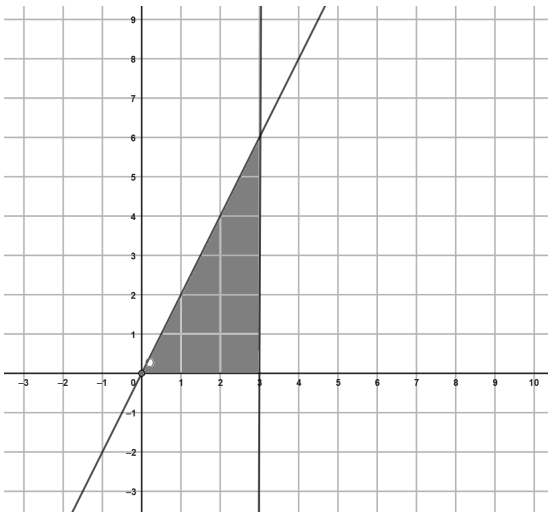
Introduction



Les droites ont pour équation $y = 2x$ et $y = x + 1$.

Calculer l'aire sous chacune des deux droites délimitée par l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 3$ et l'axe des abscisses et relier l'aire trouvée à une primitive de la fonction associée.

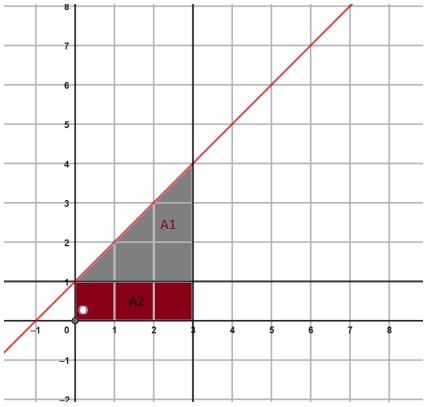
Pour le premier calcul, on cherche l'aire hachurée A suivante :



Cela revient à calculer l'aire d'un triangle rectangle. Ainsi, $A = \dfrac{3 \times 6}{2} = 9$.

On peut remarquer qu'une primitive de $x \longmapsto 2x$ est $F : x \longmapsto x^2$ et on a $F(3) - F(0) = 9$.

Pour le second calcul, on cherche l'aire hachurée A suivante :



Cela revient à calculer l'aire d'un rectangle et d'un triangle rectangle.

Ainsi, $A = 3 \times 1 + \dfrac{3 \times 3}{2} = \dfrac{15}{2}$.

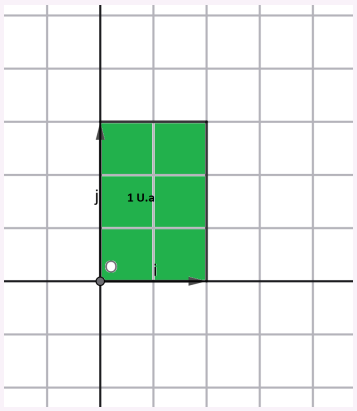
On peut remarquer qu'une primitive de $x \longmapsto x + 1$ est $F : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} + x$ et on a $F(3) - F(0) = \dfrac{9}{2} + 3 - 0 = \dfrac{15}{2}$.

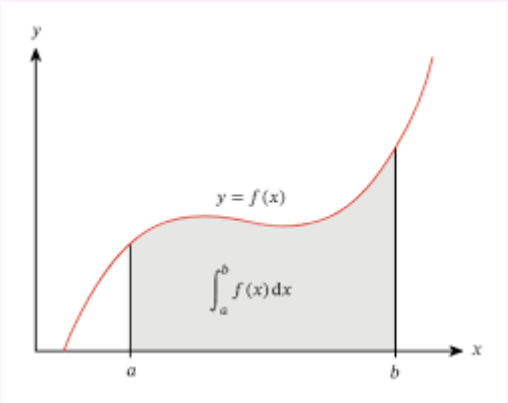
Définition

1. Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité d'aire, notée $u.a$ est l'aire du rectangle ayant pour coté $[OI]$ et $[OJ]$.
2. Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$.

   L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

   On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



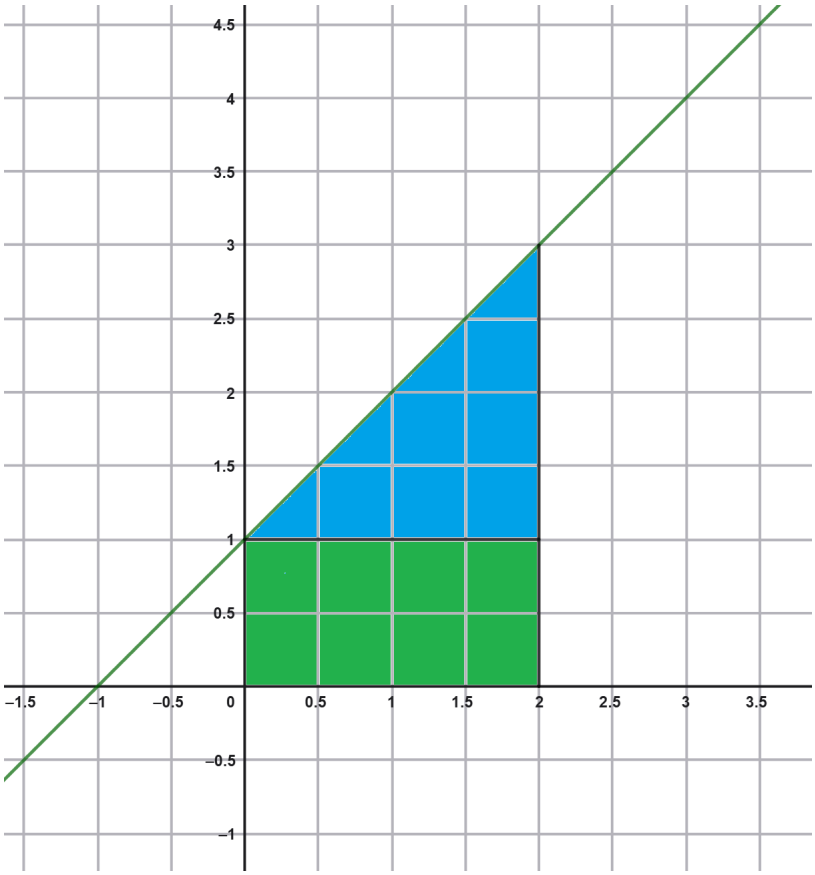


1. x est une variable muette. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre : u, t, $\diamond$.
2. le « dx » nous permet de reconnaitre la variable d'intégration.
3. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x$.

I est l'aire foncée suivante :



On a donc $\displaystyle\int_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2\times 2}{2} + 2\times 1 = 2+2 = 4$ (aire du rectangle + aire du triangle).

Question : comment fait-on quand on a une fonction « courbe » ?

On peut commencer par un encadrement de l'aire pour une fonction continue et positive.

Proposition : méthode des rectangles

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

On partage l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur et on construit des rectangles « inférieurs » et « supérieurs » en dessous et au dessus de $\mathcal{C}_f$.

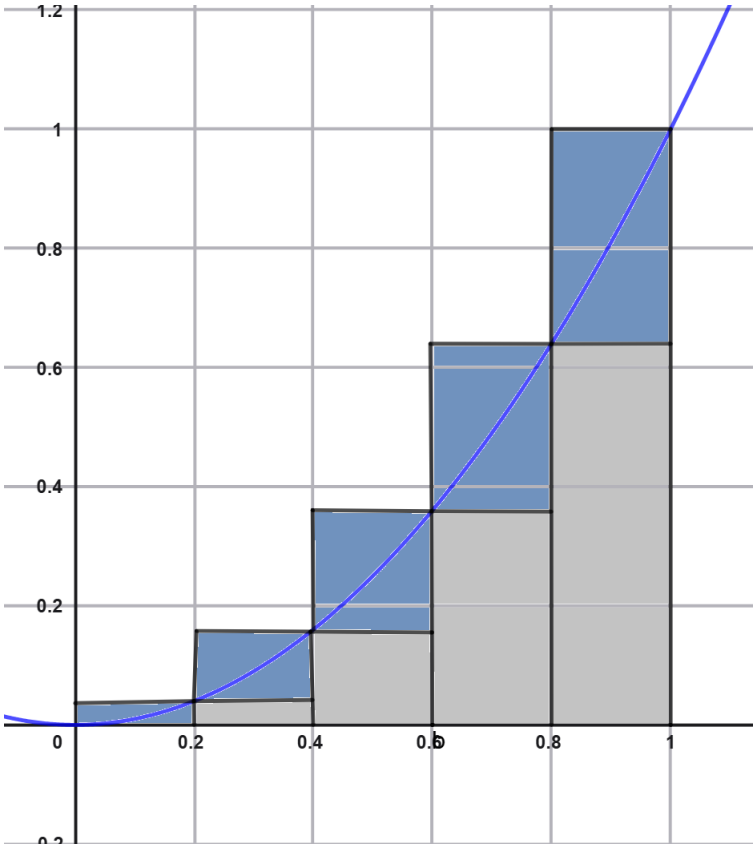
On note $A_{n,i}$ l'aire (totale) formée par les rectangles inférieurs et $A_{n,s}$ celle formée par les rectangles supérieurs. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} A_{n,i} = \lim_{n\to+\infty} A_{n,s} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

De plus, si la fonction est monotone : $A_{n,i} \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq A_{n,s}$.

Exemple

Voilà le graphe de $x \longmapsto x^2$ entre 0 et 1. Encadrons $I = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ par cette méthode en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en 5 intervalles de même longueur $0,2$.



- L'aire totale des rectangles inférieurs est

$$A_{5,i} = 0 + 0,2 \times 0,2^2 + 0,2 \times 0,4^2 + 0,2 \times 0,6^2 + 0,2 \times 0,8^2 = 0,24$$

- L'aire totale des rectangles supérieurs est

$$A_{5,s} = 0,2 \times 0,2^2 + 0,2 \times 0,4^2 + 0,2 \times 0,6^2 + 0,2 \times 0,8^2 + 0,2 * 1^2 = 0,44$$

Ainsi, $0,24 \leq I \leq 0,44$

Si on recommence mais qu'on découpe l'intervalle $[0,1]$ en 10 intervalles de même longueur $0,1$, on trouve $A_{10,i} = 0,285$ et $A_{10,s} = 0,385$. Ainsi, $0,285 \leq I \leq 0,385$. La précision est évidemment plus importante. En réalité, la valeur exacte de I est $\frac{1}{3}$ qui est à peu près égale à $0,333$.

Extension aux fonctions continues et négatives.

Définition : intégrale d'une fonction négative

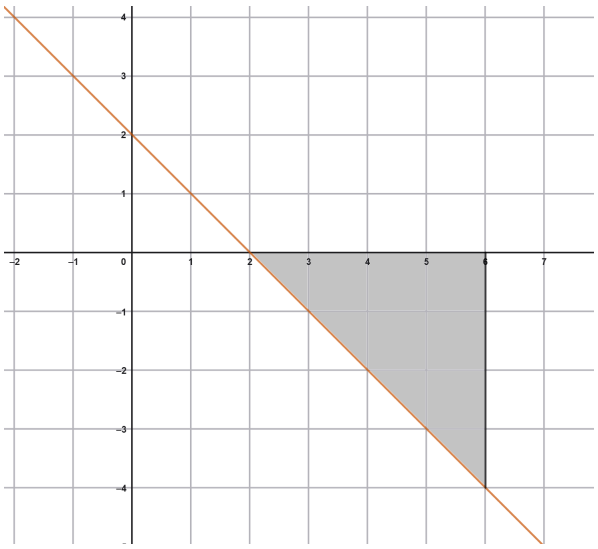
Soit f une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a,b]$.

L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On la note $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

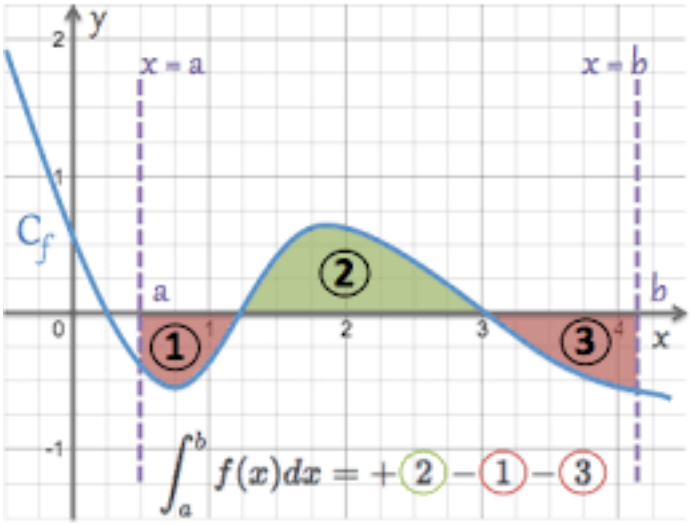
Exemple

Calculons $\int_2^6 (-x+2)\,\mathrm{d}x$.



L'aire du triangle foncé est $\frac{4 \times 4}{2} = 8$. Donc, $\int_2^6 (-x+2)\,\mathrm{d}x = -8$.

Extension aux fonctions continues de signe quelconque.



On a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A_1 + A_2 - A_3$$

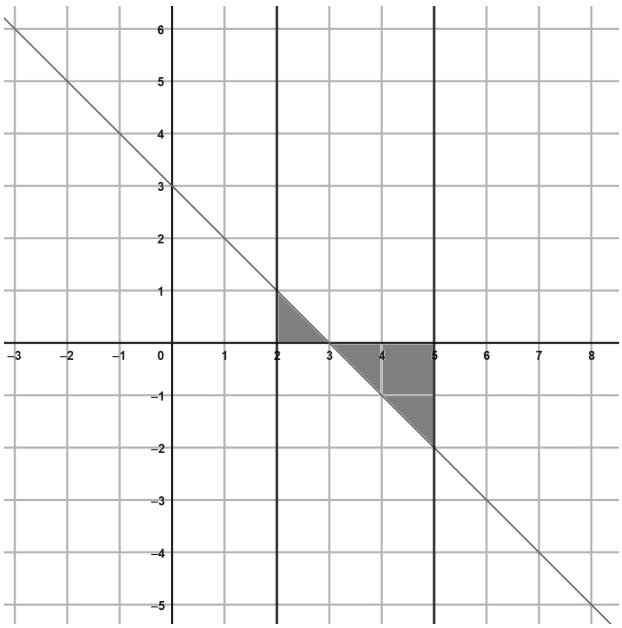
Propriétés

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. (Relation de Chasles) $\forall\, c \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
3. Pour f continue et paire sur $[-a, a]$, $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
4. Pour f continue et impaire sur $[-a, a]$, $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Exemples

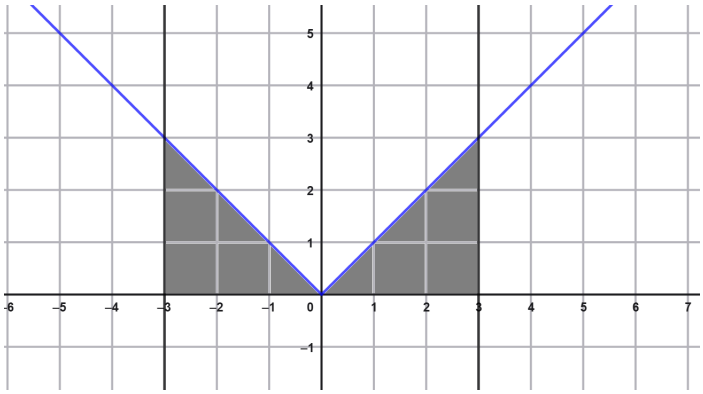
1. Calculer $\int_2^5 (3 - x)\,\mathrm{d}x$.



L'aire du petit triangle est égale à $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ et l'aire du grand triangle vaut $\frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Ainsi, $\int_2^5 (3 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$.

2. Calculer $\int_{-3}^{3} |x|\,dx$



L'aire du triangle de droite est égale à $\frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$.

Ainsi, comme $x \longmapsto |x|$ est paire, $\int_{-3}^{3} |x|\,dx = 2 \times 9 = 18$

3. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

comme $x \longmapsto \sin(x)$ est impaire, $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\,dx = 0$

Question : comment faire le calcul exact pour les fonctions courbes ?

2.2 Intégrale et primitive

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.

La fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Proposition

Soient f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$. On a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$$



$\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $[-F(x)]_a^b = -[F(x)]_a^b$.

Exemples

Calculer $\displaystyle\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

- $\displaystyle\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3}-0 = \frac{64}{3}$.
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-0 = 1$.
- $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^4 = \ln(17)-\ln(1) = \ln(17)$

2.3 Propriétés des intégrales

Proposition : linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particulier

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve : $(\alpha F+G)' = \alpha f + g$.

Exemple

Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)+3e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

- $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{4}.$
- $J = \left[\dfrac{\sin(2x)}{2} + 3 \times \dfrac{-e^{2x}}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(0 - \dfrac{3}{2}e^{\pi}\right) - \left(0 - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}e^{\pi}$

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Corollaire

Soient f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et $M \in \mathbb{R}$.

1. Si $\forall\, x \in [a,b]$ $f(x) \leq M$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M|b-a|$. En particulier, si f est positive alors son intégrale aussi.
2. Si $\forall\, x \in [a,b]$ $f(x) \geq M$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq M|b-a|$. En particulier, si f est négative alors son intégrale aussi.

Exemple

Encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \longmapsto e^{x^2}$ étant croissante sur $[0,1]$, on a : $\forall\, x \in [0,1]$, $1 \leq e^{x^2} \leq e$. D'où, $1 \leq I \leq e$.

Définition : valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple

Quelle est la valeur moyenne de $\displaystyle\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$.

Elle est égale à $\dfrac{e-1}{1-0} = e-1$.

Question : pensez-vous savoir calculer n'importe quelle intégrale ? ?